ΜΑΘΗΜΑ 7
2.3 Μέτρο μιγαδικού
Ασκήσεις
Γεωμετρικών τόπων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z, για τους οποίους οι εικόνες των μιγαδικών z, i, $-iz$ είναι συνευθειακά σημεία.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $z = x + yi$, τότε $-iz = -i(x + yi) = -ix + y = y - ix$.

Οι εικόνες των z, i, $-iz$ είναι $M(x, y)$, $A(0, 1)$, $B(y, -x)$ αντίστοιχα.

$M(x, y)$ το τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου $\Leftrightarrow$

M, A, B συνευθειακά $\Leftrightarrow$ $Det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 \\ y-0 & -x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-x-1) - y(y-1) = 0$$

$$-x^2 - x - y^2 + y = 0$$

$$x^2 + y^2 + x - y = 0 \quad \textbf{(1)}.$$

Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1^2 + 1^2 - 4 \cdot 0 = 2 > 0$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, δηλαδή $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.

Έστω οι $z \in \mathbb{C}$ με $z = \dfrac{1+\lambda i}{\lambda + i}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε γνωστό κύκλο.

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$|z| = \left|\frac{1+\lambda i}{\lambda + i}\right| = \frac{|1+\lambda i|}{|\lambda + i|} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1$$

Άρα η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο (Ο, 1), όπου Ο η αρχή των αξόνων.

ii)

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του τυχαίου z με $z = \dfrac{1+\lambda i}{\lambda + i}$ $\Leftrightarrow$

> i) Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κάποια γραμμή, πάμε με $\Rightarrow$
> ii) Όταν θέλουμε να βρούμε το γ.τόπο της εικόνας του z, πάμε με $\Leftrightarrow$

$$x + yi = \frac{1+\lambda i}{\lambda + i}$$

$$(x + yi)(\lambda + i) = 1 + \lambda i$$

$$x\lambda - y + (x + y\lambda)i = 1 + \lambda i$$

$$x\lambda - y = 1 \quad \text{και} \quad x + y\lambda = \lambda$$

$$x\lambda = y + 1 \quad \text{και} \quad x + y\lambda = \lambda \qquad \textbf{(1)}$$

- Όταν $x \neq 0$, η (1) $\Leftrightarrow$ $\lambda = \dfrac{y+1}{x}$ και $x + y\dfrac{y+1}{x} = \dfrac{y+1}{x}$

$$x + y\frac{y+1}{x} = \frac{y+1}{x}$$

$$x^2 + y^2 + y = y + 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{με} \quad x \neq 0$$

Επομένως, όταν $x \neq 0$, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 1, εκτός από τα σημεία του $A(0, 1)$ και $B(0, -1)$ που έχουν τετμημένη 0..

- Όταν $x = 0$, η (1) $\Leftrightarrow$ $0 \cdot \lambda = y + 1$ και $0 + y\lambda = \lambda$

$$0 = y + 1 \quad \text{και} \quad y\lambda = \lambda$$

$$y = -1 \quad \text{και} \quad -1\lambda = \lambda$$

$$y = -1 \quad \text{και} \quad 2\lambda = 0$$

$$y = -1 \quad \text{και} \quad \lambda = 0$$

Οπότε το σημείο $B(0, -1)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου.

* Πλεονασματικά, μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $A(0, 1)$ να είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου,

δηλαδή να είναι $0 + i = \dfrac{1+\lambda i}{\lambda + i}$.

$$i\lambda - 1 = 1 + \lambda i \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 1 \quad \text{που είναι άτοπο}$$

άρα δεν υπάρχει τέτοιο λ.

Τελικά , ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 1 εκτός από το σημείο A(0, 1)

3.

Έστω οι $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = 2$ και $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{4}{z}\right)$. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα του άξονα $x'x$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $z = x + yi$

Βρίσκουμε χωριστά $|z| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 4$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{z} = \frac{x}{4} - \frac{y}{4}i$$

$$\frac{4}{z} = x - yi$$

Άρα $z + \dfrac{4}{z} = x + yi + x - yi = 2x$

και $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{4}{z}\right) = x$

Έστω $w = u + vi$

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right) \Leftrightarrow u + vi = x \Leftrightarrow u = x \text{ και } v = 0$$

Άρα $w = x + 0i$ πραγματικός, άρα η εικόνα του κινείται στον άξονα $x'x$.

Αλλά $(1) \Rightarrow 4 - x^2 = y^2 \geq 0$

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 4$$

$$|x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Και αφού $u = x$, θα είναι $-2 \leq u \leq 2$.

Επομένως, η εικόνα του w κινείται στο τμήμα AB του άξονα $x'x$, όπου A(–2, 0) και B(2, 0)

4.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει

i) $2 \le |1+2z-i| \le 6$

ii) $\left||z-2i|-|z+2i|\right| = 1$

iii) $|z-2i|-|z+2i| = 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$2 \le |1+2z-i| \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le 2\left|\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}i\right| \le 6$$

$$1 \le \left|z-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right| \le 3 \qquad \textbf{(1)}$$

Με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και

ακτίνες 1 και 3 γράφουμε κύκλους.

Η (1) σημαίνει ότι η απόσταση της εικόνας του z από το K είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1 και μικρότερη ή ίση του 3, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι το μέρος του επιπέδου μεταξύ των κύκλων μαζί με τους κύκλους.

ii)

$$\left||z-2i|-|z+2i|\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left||z-(0+2i)|-|z-(0-2i)|\right| = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Θεωρούμε τα σημεία $E(0, 2)$, $E'(0, -2)$

Η (2) σημαίνει ότι το απόλυτο της διαφοράς των αποστάσεων της εικόνας του z από τα E, E' ισούται με 1, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι υπερβολή με $\gamma = 2$ και $2\alpha = 1$, άρα $\beta = \sqrt{\gamma^2-\alpha^2} = \sqrt{4-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = 1$

iii)

$|z-2i|-|z+2i| = 1 > 0$ (δηλαδή $|z-2i| > |z+2i|$)

Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι ο κλάδος της προηγούμενης υπερβολής, που βρίσκεται κάτω του άξονα $x'x$.

5.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει

$$\frac{1}{|z-5|}+\frac{1}{|z+5|}=\frac{20}{|z-5||z+5|}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\frac{1}{|z-5|}+\frac{1}{|z+5|}=\frac{20}{|z-5||z+5|} \Leftrightarrow |z+5| + |z-5| = 20 \Leftrightarrow$$

$$|z-(-5+0i)| + |z-(5+0i)| = 20 \quad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τα σημεία $E(5, 0))$, $E'(-5, 0)$

Η (1) σημαίνει ότι το άθροισμα των αποστάσεων της εικόνας του z από τα E, E' ισούται με 20, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι έλλειψη με $\gamma = 5$ και $2\alpha = 20$, άρα $\beta = \sqrt{\alpha^2-\gamma^2} = \sqrt{10^2-5^2} = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

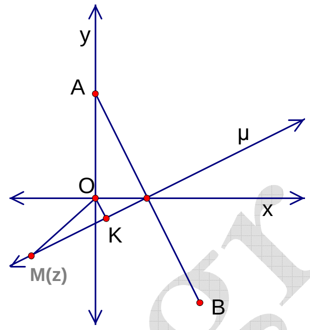
Η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{(5\sqrt{3})^2} = 1$

6.

Οι μιγαδικοί z επαληθεύουν την ισότητα $|z-i|=|z-1+i|$. Να βρείτε εκείνον που έχει το ελάχιστο μέτρο.

Προτεινόμενη λύση

$|z-i|=|z-1+i| \Leftrightarrow |z-(0+1i)|=|z-(1-1i)|$ **(1)**



Θεωρούμε τα σημεία $A(0,\ 1)$, $B(1,\ -1)$

Η (1) σημαίνει ότι η εικόνα του z ισαπέχει από τα A, B, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η μεσοκάθετος μ του τμήματος AB.

Εξίσωση του γεωμετρικού τόπου **:**

Έστω $z = x + yi$

$$|z-i|=|z-1+i| \Leftrightarrow |x+yi-i|=|x+yi-1+i|$$

$$|x+(y-1)i|=|(x-1)+(y+1)i|$$

$$|x+(y-1)i|^2=|(x-1)+(y+1)i|^2$$

$$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$$

$$x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+2y+1$$

$$2x-4y-1=0 \quad \textbf{(2)}$$

Φέρνουμε $OK \perp \mu$

Έστω M τυχαία εικόνα του z.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OKM έχουμε $(OK) \le (OM)$, άρα ο ζητούμενος z, που έχει το ελάχιστο μέτρο, δηλαδή την ελάχιστη απόσταση από το O, είναι αυτός που έχει για εικόνα του το K.

Συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας OK : $\lambda_{OK} = \lambda_{AB} = \dfrac{-1-1}{1-0} = -2$

Εξίσωση της ευθείας OK : $y-0=-2(x-0) \Leftrightarrow y=-2x$ **(3)**

Λύνουμε το σύστημα των (2), (3) για να βρούμε τις συντεταγμένες του K

$$(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 2x-4\cdot(-2x)-1=0 \Leftrightarrow 10x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{10}$$

$$(3) \Leftrightarrow y=-2\cdot\frac{1}{10}=-\frac{1}{5}$$

Επομένως ο ζητούμενος z είναι $\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{5}i$

7.

Οι μιγαδικοί z επαληθεύουν την ισότητα $|2+z-i|=|3+i-z|$. Να βρείτε εκείνον που έχει το ελάχιστο μέτρο.

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 6

8.

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $z \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύει $(3z-1)^{500}=(z-3)^{500}$, ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Προτεινόμενη λύση

$$(3z-1)^{500}=(z-3)^{500} \Rightarrow \left|(3z-1)^{500}\right| = \left|(z-3)^{500}\right|$$

$\boxed{\text{Μόνο} \Rightarrow}$

$$|3z-1|^{500} = |z-3|^{500}$$

$$|3z-1| = |z-3|$$

$$|3z-1|^2 = |z-3|^2$$

$$(3z-1)(3\bar{z}-1) = (z-3)(\bar{z}-3)$$

$$9z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 1 = z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9$$

$$8z\bar{z} = 8$$

$|z|^2 = 1$, άρα $|z| = 1$ κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

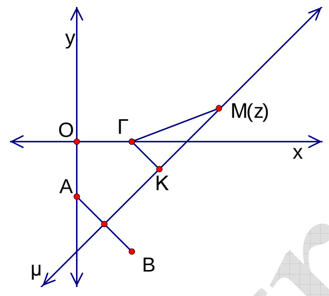
9.

Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z+i| = |z-1+2i|$, να βρείτε το ελάχιστο του $|z-1|$.

Προτεινόμενη λύση

$|z+i| = |z-1+2i|$

$|z-(0-1i)| = |z-(1-2i)|$ **(1)**



Θεωρούμε τα σημεία $A(0,-1)$, $B(1,-2)$

Η (1) σημαίνει ότι η εικόνα του z ισαπέχει από τα A, B, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η μεσοκάθετος μ του τμήματος AB.

Εξίσωση του γεωμετρικού τόπου **:**

Δουλεύουμε όπως στην άσκηση 6 και βρίσκουμε

$(\mu): \quad x - y - 2 = 0$ **(2)**

Ο αριθμός $|z-1| = |z-(1+0i)|$ εκφράζει την απόσταση του σημείου M(z) από το σημείο Γ(1, 0)

Φέρνουμε $ΓK \perp \mu$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΜ έχουμε (ΓΚ) ≤ (ΓΜ).

Άρα το ελάχιστο του (ΓΜ) είναι το (ΓΚ),

Δηλαδή το ελάχιστο του $|z-1|$ είναι η $d(\Gamma,\mu) = \dfrac{|1\cdot 1 - 1\cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10.

Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|2z-1| = |4i-2z|$ να βρείτε το ελάχιστο του $|3z+2i-1|$

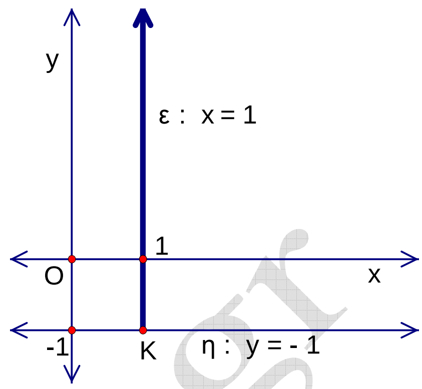
Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 9

11.

Οι μιγαδικός z επαληθεύει τις σχέσεις $|z-i| \le |z-3|$ και $z+\bar{z}=2$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του.

Προτεινόμενη λύση



Έστω $x+yi$ ο τυχαίος z $\Leftrightarrow$

$|z-i| \le |z-3|$ και $z+\bar{z}=2$

$|x+yi-i| \le |x+yi-3|$ και $2x=2$

$|x+(y-1)i|^2 \le |(x-3)+yi|^2$ και $x=1$

$x^2+(y-1)^2 \le (x-3)^2+y^2$ και $x=1$

$x^2+y^2-2y+1 \le x^2-6x+9+y^2$ και $x=1$

$6x-2y \le 8$ και $x=1$

$6\cdot 1-2y \le 8$ και $x=1$

$-2y \le 2$ και $x=1$

$y \ge -1$ και $x=1$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ημιευθεία Κε (**ε :** $x=1$) πάνω από την ευθεία που έχει εξίσωση $y=-1$.

12.

Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z-2|=|z+i|$, να βρείτε σε ποια γνωστή γραμμή ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $w=\dfrac{2z-4}{z+i}+1$

Προτεινόμενη λύση

$$w=\frac{2z-4}{z+i}+1 \Rightarrow w-1=\frac{2(z-2)}{z+i} \Rightarrow$$

$$|w-1| = \left|\frac{2(z-2)}{z+i}\right| \Rightarrow$$

$$|w-1| = \frac{|2(z-2)|}{|z+i|} \Rightarrow$$

$$|w-1| = 2\frac{|z-2|}{|z+i|} \Rightarrow |w-1| = 2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 2.

13.

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης

$(-2+i)^{999}(z-2000)^{2001}-\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^{999}(z-2000-2i)^{2001}=0$ ανήκουν σε ευθεία.

Προτεινόμενη λύση

Παρατηρούμε ότι $|-2+i| = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$ και

$|\sqrt{3}+i\sqrt{2}| = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$

$$(-2+i)^{999}(z-2000)^{2001}-\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^{999}(z-2000-2i)^{2001}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(-2+i)^{999}(z-2000)^{2001} = \left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^{999}(z-2000-2i)^{2001}$$

$$\left|(-2+i)^{999}(z-2000)^{2001}\right| = \left|\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^{999}(z-2000-2i)^{2001}\right|$$

$$\left|(-2+i)^{999}\right|\left|(z-2000)^{2001}\right| = \left|\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^{999}\right|\left|(z-2000-2i)^{2001}\right|$$

$$|-2+i|^{999}\ |z-2000|^{2001} = \left|\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right|^{999}\ |z-2000-2i|^{2001}$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^{999}|z-2000|^{2001} = \left(\sqrt{5}\right)^{999}|z-2000-2i|^{2001}$$

$$|z-2000|^{2001} = |z-2000-2i|^{2001}$$

$$|z-2000| = |z-2000-2i|$$

$|z-(2000+0i)| = |z-(2000+2i)| \quad \Rightarrow$ οι εικόνες των ριζών z της δοσμένης εξίσωσης ισαπέχουν από τα σημεία A(2000, 0), B(2000, 2), άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του τμήματος AB

14.

Οι μιγαδικοί z, w συνδέονται με τη σχέση $zw = 4w + iz$. Αν η εικόνα του z κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 4$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε ευθεία.

Προτεινόμενη λύση

$zw = 4w + iz \Rightarrow zw - iz = 4w \Rightarrow (w - i)z = 4w$ **(1)**

Αν είναι $w - i = 0$, δηλαδή $w = i$, η (1) $\Rightarrow$ $0 \cdot z = 4i \Rightarrow 0 = 4i$ άτοπο.
Άρα $w - i \neq 0$

Η (1) $\Rightarrow z = \dfrac{4w}{w-i} \Rightarrow |z| = \left|\dfrac{4w}{w-i}\right| = \dfrac{|4w|}{|w-i|} = \dfrac{4|w|}{|w-i|}$ **(2)**

Επειδή η εικόνα του z κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 4$,

θα είναι $|z| = 4 \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{4|w|}{|w-i|} = 4 \Rightarrow |w| = |w-i| \Rightarrow$

$|w-(0+0i)| = |w-(0+i)| \Rightarrow$

η εικόνα του w ισαπέχει από τα σημεία $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, άρα κινείται στη μεσοκάθετο του τμήματος OA

15.

Για το μιγαδικό z και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται ότι $(1-\lambda i)z = 4-2i$. Να βρείτε

i) το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z

ii) τους λ, z ώστε ο z να έχει το μέγιστο μέτρο.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $z = x + yi$

$$(1-\lambda i)z = 4-2i \Leftrightarrow (1-\lambda i)(x+yi) = 4-2i \Leftrightarrow$$

$$x + yi - \lambda xi + \lambda y = 4 - 2i \Leftrightarrow$$

$$x + \lambda y = 4 \quad \text{και} \quad y - \lambda x = -2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda y = 4 - x \quad \text{και} \quad y = \lambda x - 2 \qquad \textbf{(1)}$$

- Όταν $y = 0$ το σύστημα (1) γίνεται $0 = 4 - x$ και $0 = \lambda x - 2 \Leftrightarrow$

  $x = 4$ και $0 = \lambda \cdot 4 - 2 \Leftrightarrow$

  $x = 4$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

  Άρα το σημείο $\Delta(4, 0)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, όταν $\lambda = \frac{1}{2}$

- Όταν $y \neq 0$ το σύστημα (1) $\Leftrightarrow$ $\lambda = \frac{4-x}{y}$ και $y = \frac{4-x}{y}x - 2$

  $\lambda = \frac{4-x}{y}$ και $y^2 = 4x - x^2 - 2y$

  $\lambda = \frac{4-x}{y}$ και $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ **(2)**

  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 4 - 4\cdot 0 = 20 > 0$

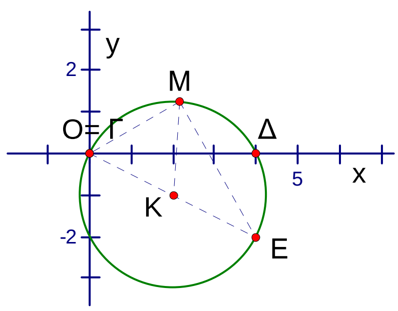
  Άρα, η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\sqrt{20}$,

  εκτός των σημείων του Γ, Δ που έχουν τεταγμένη $y = 0$ (αφού $y \neq 0$).

  Για να βρούμε αυτά τα σημεία, θέτουμε στη (2) όπου y το 0.

  $x^2 - 4x = 0$ άρα $x = 0$ η $x = 4$. Οπότε $\Gamma(0, 0)$ και $\Delta(4, 0)$

Τελικά (από τις δύο περιπτώσεις), ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος (2) εκτός από το σημείο του $\Gamma(0, 0)$



ii)

Φέρνουμε τη διάμετρο ΓΚΕ (ΟΚΕ)

Έστω Μ η τυχαία εικόνα του z.

Με την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο

ΟΚΜ έχουμε $(OM) \leq (OK) + (KM)$

$|z| \leq (OK) + (KE)$

$|z| \leq (OE)$

Άρα το $|z|$ γίνεται μέγιστο, όταν $M \equiv E$

Συντεταγμένες του E :

K μέσο του OE $\Rightarrow$ $2x_K = 0 + x_E$ $\Rightarrow$ $2 \cdot 2 = x_E$ $\Rightarrow$ $x_E = 4$

και $2y_K = 0 + y_E$ $\Rightarrow$ $2 \cdot (-1) = x_E$ $\Rightarrow$ $y_E = -2$

Άρα $z_E = 4 - 2i$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2) $\Rightarrow$ $\lambda_E = \dfrac{4-4}{-2} = 0$

Άρα ο z έχει το μέγιστο μέτρο , όταν $\lambda = 0$.

16.

Έστω οι $z \in \mathbb{C}$ με $(1 + \lambda i)z = 3\lambda + i$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο.

ii) Για τους τυχαίους z_1, z_2, από τους μιγαδικούς z, να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 4$.

Υπόδειξη

i)

Εργαζόμαστε όπως στο (i) της άσκησης 15 και βρίσκουμε ότι οι εικόνες του z ανήκουν στον κύκλο $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$

ii)

Η τυχαία χορδή $\leq$ της διαμέτρου

17.

Δίνονται οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1 - z_2| = \rho$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z, για τον οποίο ισχύει $(z - z_1)(\overline{z} - \overline{z}_1) + (z - z_2)(\overline{z} - \overline{z}_2) = \rho^2$

Προτεινόμενη λύση

Έστω A_1, A_2 οι εικόνες των δοσμένων μιγαδικών z_1, z_2 και M η εικόνα του τυχαίου z για τον οποίο ισχύει $(z - z_1)(\overline{z} - \overline{z}_1) + (z - z_2)(\overline{z} - \overline{z}_2) = \rho^2 \Leftrightarrow$

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = \rho^2$$

$$|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

$$(MA_1)^2 + (MA_2)^2 = (A_1A_2)^2 \Leftrightarrow$$

το τρίγωνο MA_1A_2 είναι ορθογώνιο στο $M \Leftrightarrow$

το M διαγράφει κύκλο διαμέτρου A_1A_2

18.

Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν $|z-1-3i| \le \sqrt{2}$ και $|w-3-i| \le \sqrt{2}$.

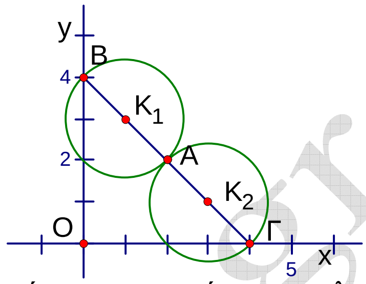
i) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί z, w τέτοιοι ώστε $z = w$

ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$|z-1-3i| \le \sqrt{2}$ **(1)** $\Leftrightarrow$ $|z-(1+3i)| \le \sqrt{2}$



Με βάση τη σχέση (1), ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι ο κυκλικός δίσκος, που έχει κέντρο $K_1(1, 3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

$|w-3-i| \le \sqrt{2}$ **(2)** $\Leftrightarrow$ $|w-(3+i)| \le \sqrt{2}$

Με βάση τη σχέση (2), ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι ο κυκλικός δίσκος, που έχει κέντρο $K_2(3, 1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

Αφού $z = w$, πρόκειται για τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Είναι $(K_1K_2) = \sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \rho+\rho$

Άρα οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α.

Επομένως οι δύο γεωμετρικοί τόποι έχουν μοναδικό κοινό στοιχείο, του οποίου εικόνα είναι το σημείο επαφής Α.

ii)

Η διάκεντρος K_1K_2 τέμνει τους κύκλους K_1, K_2 στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα.

Το μέγεθος $|z-w|$ εκφράζει την απόσταση τυχαίου σημείου του ενός κυκλικού δίσκου από το τυχαίο σημείο του άλλου.

Άρα $|z-w| \le (\text{ΒΓ}) = 2\rho = 2\sqrt{2}$ η μέγιστη τιμή.

19.

Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z+3|+|\overline{z}-3|=10$, να αποδείξετε ότι $|9z-\overline{z}|=40$.

Προτεινόμενη λύση

Επειδή $|\overline{z}-3| = |\overline{z-3}| = |z-3|$ η υπόθεση γράφεται

$$|z-(-3+0i)| + |z-(3+0i)| = 10$$

Έτσι, το άθροισμα των αποστάσεων της εικόνας του z από τα σημεία Ε΄(–3, 0), Ε(3, 0) ισούται με 10, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $z = x + yi$ είναι έλλειψη με εστίες Ε, Ε΄, $\alpha = 5$ και $\gamma = 3$.

Είναι δε : $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16 \;\Rightarrow\; \beta = 4$

Η εξίσωση της έλλειψης είναι $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 16x^2 + 25y^2 = 400$ **(1)**

$$|9z-\overline{z}| = 40 \;\Leftrightarrow\; |9(x+yi)-(x-yi)| = 40$$

$$|9x+9yi-x+yi| = 40$$

$$|8x+10yi| = 40$$

$$|4x+5yi| = 20$$

$$|4x+5yi|^2 = 20^2$$

$$(4x)^2+(5y)^2 = 400$$

$16x^2+25y^2 = 400$ που ισχύει από την (1)

20.
Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z+i|+|z-i|=|z+1|+|z-1|$ να αποδείξετε ότι $|\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|$.

1η Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $|z+1|+|z-1| = 2\alpha$ **(1)**, $|z+i|+|z-i|=2\alpha$ **(2)**

$|z-(-1+0i)|+|z-(1+0i)| = 2\alpha$, $|z-(0-1i)|+|z-(0+1i)|=2\alpha$

Κατά την (1), ο $z = x+yi$ ανήκει σε έλλειψη $\mathbb{C}_1$ με εστίες $E'(-1, 0)$, $E(1, 0)$,

$\gamma = 1$ και εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x^2+\alpha^2 y^2 = \alpha^2\beta^2$ **(3)**

Κατά τη (2), ο $z = x+yi$ ανήκει σε έλλειψη $\mathbb{C}_2$ με εστίες $H'(0, -1)$, $H(0, 1)$,

$\gamma = 1$ και εξίσωση $\dfrac{y^2}{\alpha^2}+\dfrac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 y^2+\alpha^2 x^2 = \alpha^2\beta^2$ **(4)**

$$(3)-(4) \Rightarrow \beta^2 x^2+\alpha^2 y^2-\beta^2 y^2-\alpha^2 x^2 = 0$$

$$\beta^2(x^2-y^2)-\alpha^2(x^2-y^2) = 0$$

$$(x^2-y^2)(\beta^2-\alpha^2) = 0$$

$$x^2-y^2 = 0$$

$$x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow |\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|.$$

2η Προτεινόμενη λύση

$$|z+i|+|z-i|=|z+1|+|z-1| \Rightarrow$$

$$(|z+i|+|z-i|)^2 = (|z+1|+|z-1|)^2$$

$$(|z+i|)^2+2|z+i||z-i|+(|z-i|)^2 = (|z+1|)^2+2|z+1||z-1|+(|z-1|)^2$$

$$(z+i)(\bar{z}-i)+2|(z+i)(z-i)|+(z-i)(\bar{z}+i) =$$
$$= (z+1)(\bar{z}+1)+2|(z+1)(z-1)|+(z-1)(\bar{z}-1)$$

$$z\bar{z}-zi+i\bar{z}+1+2|z^2+1|+z\bar{z}+zi-i\bar{z}+1 =$$
$$= z\bar{z}+z+\bar{z}+1+2|z^2-1|+z\bar{z}-z-\bar{z}+1$$

$$2|z^2+1| = 2|z^2-1|$$

$$|z^2+1| = |z^2-1|$$

$$|z^2+1|^2 = |z^2-1|^2$$

$(z^2+1)(\overline{z}^2+1) = (z^2-1)(\overline{z}^2-1)$

$z^2\,\overline{z}^2 + z^2 + \overline{z}^2 + 1 = z^2\,\overline{z}^2 - z^2 - \overline{z}^2 + 1$

$2z^2 + 2\overline{z}^2 = 0$

$z^2 + \overline{z}^2 = 0$

Έστω $z = x + yi$. Τότε $(x+yi)^2 + (x-yi)^2 = 0$

$x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 + 2xyi - y^2 = 0$

$2x^2 = 2y^2$

$x^2 = y^2$

$|x| = |y|$